1462. *a)* Minden valós szám.
b) Nincs ilyen valós szám.
c) $c < 2$ vagy $c > 3$;
d) $d \leq 2$ vagy $d \geq 5$.

1463. *a)* Az első egyenlőtlenségből: $m < -\frac{1}{3}$ vagy $m > 2$.
A második egyenlőtlenségből: Nincs ilyen valós szám. Tehát az egyenlőtlenségrendszernek nincs megoldása.
b) Az első egyenlőtlenségből $\frac{4}{3} < n < \frac{10}{3}$.
A második egyenlőtlenségből: Minden valós számmegoldás. Tehát az egyenlőtlenségrendszer megoldása: $\frac{4}{3} < n < \frac{10}{3}$.

1464. *a)* $1 < m < 2$ vagy $m > 3$;
b) $2 < n < 3$ vagy $n > 5$;
c) $m < -4 - \sqrt{2}$ vagy $-4 + \sqrt{2} < m < 1$;
d) $n > 4$.

1465. *a)* $p < -3$ vagy $p > 1$;
b) $q < -4$, $q \neq -6$, $q > 6$;
c) $1 < r < \frac{3}{2}$, vagy $r > 2$;
d) $-2 < s < 6 - \sqrt{15}$ vagy $5 < s < 6 + \sqrt{15}$.

IV

Paraméteres és összetett egyenlőtlenségek

1466. *a)* Ha $m = 1$, akkor minden valós szám megoldás, ha $x \neq -1$.
Ha $m < 1$, akkor $x < -1 - \sqrt{1-m}$ vagy $x > -1 + \sqrt{1-m}$,
ha $m > 1$, akkor minden valós szám megfelel.
b) Ha $m > -\frac{25}{4}$, akkor $\frac{5 - \sqrt{25+4m}}{2} < x < \frac{5 + \sqrt{25+4m}}{2}$.
Ha $m \leq -\frac{25}{4}$, akkor nincs valós megoldás.
c) Ha $m \leq -\frac{4}{5}$ vagy $m \geq 2$, akkor minden valós szám megoldás.
Ha $-\frac{4}{5} < m < 2$, akkor $x \leq -3 - \sqrt{-5m^2 + 6m + 8}$, vagy $x \geq -3 +$
$+ \sqrt{-5m^2 + 6m + 8}$.
d) Ha $m \geq 11$, akkor $-1 - \sqrt{11-m} < x < -1 + \sqrt{11-m}$,
ha $m < 11$, akkor nincs valós megoldás.

IV

1467. Ha $m = 0$, akkor az elsőfokú egyenlet megoldásai: $x < \frac{5}{12}$.
Ha $m < 0$ és $D = 144 + 20m \le 0$, azaz $m \le -7{,}2$, akkor $\forall x \in R$, $x \ne \frac{5}{6}$.
Ha $m > 0$ és $D \le 0$, azaz $m \ge -7{,}2$, akkor nincs valós megoldás.
Ha $m > 0$, akkor a diszkrimináns pozitív, így $\frac{-6-\sqrt{36+5m}}{m} < x <$
$< \frac{-6+\sqrt{36+5m}}{m}$.

1468. Ha $m = -3$, akkor elsőfokú az egyenlőtlenség, végtelen sok megoldás van. Ha $m < -3$, akkor mindig van megoldás, mivel a bal oldal függvénye konkáv parabola.
Ha $m > -3$, akkor $D < 0$ esetén nem lenne valós megoldás.
$D = 25 + 16(m+3) < 0$, ha $m < -\frac{73}{16}$. Ez ellentmondásra vezet, így az egyenlőtlenségnek mindig van valós megoldása.

1469. Az állítás akkor igaz minden x-re, ha a bal oldal diszkriminánsa negatív.
$D = 4(m+1)^2 - 4(9m-5) = 4(m-1)(m-6) < 0$ teljesül ha $1 < m < 6$.

1470. A bal oldal diszkriminánsa: $D = (m+2)^2 - 4(8m+1) = m(m-28)$.
Ha $D < 0$ azaz $0 < m < 28$, akkor minden $x \in R$ megoldás.
Ha $D = 0$ azaz $m = 0$, $m = 28$, akkor $\forall x \in R$, de $x \ne -1; -15$.
Ha $D > 0$, azaz $m < 0$ vagy $m > 28$ akkor $x < \frac{-m-2-\sqrt{m(m-28)}}{2}$ vagy
$x > \frac{-m-2+\sqrt{m(m-28)}}{2}$.

1471. A bal oldal diszkriminánsa $D = -8m^2 - 8m + 16$.
Ha $m = -1$, akkor $4x - 6 < 0$, azaz $x < \frac{3}{2}$.
Ha $m > -1$, akkor az egyenlőtlenség teljesüléséhez $D > 0$ szükséges. Ez $-2 < m < 1$, de $m > -1$ miatt: $-1 < m < 1$ esetén igaz, ekkor
$x < \frac{m-1-\sqrt{-2m^2-2m+4}}{m+1}$ vagy $x < \frac{m-1+\sqrt{-2m^2-2m+4}}{m+1}$.
Ha $m < -1$, akkor az egyenlőtlenség minden valós x számra teljesül, feltéve ha a diszkrimináns negatív.
$D < 0$, azaz: $m < -2$, vagy $m > 1$, összevetve a feltétellel $m < -2$.

1472. Vizsgáljuk a bal oldal diszkriminánsát!
$D = -8m^2 - 56m + 64$
(a) $D = 0$, ha $m = 1$ vagy $m - 8$.
(b) $D < 0$, ha $m < -8$ vagy $m > 1$.
(c) $D > 0$, ha $-8 < m < 1$.

I. Ha $m^2+4m-5=0$, akkor az egyenlőtlenség elsőfokú. Ez teljesül, ha $m=1$, ekkor $x<\frac{3}{4}$, illetve ha $m=-5$, ekkor $x>-\frac{3}{8}$.
II. A főegyüttható pozitív ha $m<-5$, vagy $m>1$.
(1) Ha $D<0$, akkor $\forall x\in R$ esetén teljesül az egyenlőtlenség. $m<-8$ vagy $m>1$.
(2) Ha $D=0$, akkor összevetve a feltétellel $m=-8$ esetén $\forall x\in R$ megoldás.
(3) Ha $D>0$, akkor $-8<m<-5$ esetén $x<\frac{2m+2-\sqrt{-8m^2-56m+64}}{2\left(m^2+4m-5\right)}$,

vagy $x>\frac{2m+2+\sqrt{-8m^2-56m+64}}{2\left(m^2+4m-5\right)}$.

III. Ha a főegyüttható negatív, azaz $-5<m<1$, akkor:

$$\frac{2m+2-\sqrt{-8m^2-56m+64}}{2\left(m^2+4m-5\right)}<x<\frac{2m+2+\sqrt{-8m^2-56m+64}}{2\left(m^2+4m-5\right)}.$$

1473. A téglalap oldalai: *a; b*. $k=40\,\text{cm}$, $b=20-a$. Maximális a terület, ha $a(20-a)$ maximális.
Teljes négyzetté alakítás után: $a=10\,\text{cm}$. Ekkor a négyszög négyzet, területe $100\,\text{cm}^2$.
$a(20-a)>50$ egyenlőtlenség megoldása: $10-5\sqrt{2}<a<10+5\sqrt{2}$. Ennek alapján b értéke egyértelműen meghatározható minden adott a esetén.

1474. $k(1000)=25\,725\,000$ Ft, $b(1000)=19\,446\,250$ Ft,
$k(2000)=51\,400\,000$ Ft $b(2000)=94\,456\,250$ Ft.
Akkor lesz nyereséges a termék gyártása, ha a $b(x)>k(x)$, azaz
$25x^2-5500x-43\,750>25\,675x+50\,000$;
megoldása $x<-3 \quad \vee x>1250$.
A termék gyártása nyereséget hoz, ha 1250 db-nál többet gyártanak.

1475. A kétjegyű szám tízes helyiértékén x, egyes helyiértékén $x+3$ szám van $x\in\mathbf{N}$. Így a kétjegyű szám: $11x+3$
$26<11x+3<49 \Rightarrow x=3, 4$. A kétjegyű szám tehát a 36, illetve a 47.

1476. A hajó által megtett út: $s_H=20+4t$.
A motorcsónak által megtett út: $s_M=\frac{3}{2}t^2$ $\left(s=\frac{a}{2}t^2 \text{ segítségével}\right)$

$s_M>s_H$,
$\frac{3}{2}t^2>20+4t$ megoldása: $t>5{,}22$ s.
A motorcsónak elindulása után 5,22 s elteltével a motorcsónak által megtett út több, mint a hajó által megtett út.

1477. Mivel mindkét kifejezés diszkriminánsa negatív, ezért minden egész szám megoldás.
Az első tényező minden valós x-re pozitív, a második $x = 5$-re nulla, különben pozitív. Így a megoldás: $x = 5$.

1478. A kettős egyenlőtlenség mindhárom tagja pozitív, így elég megmutatni a négyzetre emeléssel adódó egyenlőtlenségek helyes voltát. Pitagorasz tételét is felhasználva az első egyenlőtlenség jobb és bal oldalának négyzetének különbsége:

IV

$$\left(x^2+xy+\frac{y^2}{4}\right)-\left(x^2+y^2\right)=\frac{y}{4}(4x-3y)>0,\text{ mivel } x>y.$$

Hasonlóan a második egyenlőtlenségből:

$\left(x^2+y^2\right)-\frac{64}{81}\left(x^2+xy+\frac{y^2}{4}\right)=\frac{1}{81}\left[z^2+16(x-2y)^2\right]>0$, így a második rész is igaz.

1479. Tegyük fel, hogy létezik a feltételt kielégítő p szám és x, y számokra teljesül az egyenlőtlenség. Ekkor y helyére $(p-x)$-et írva:

$5x^2-4(2p+3)x+4\left(p^2+2p+1\right)\le 0$ egyenlőtlenségnek van megoldása x-re.

Ebből a diszkriminánst vizsgálva p-re: $-p^2+2p+4\ge 0$, azaz
$1-\sqrt{5}\le p\le 1+\sqrt{5}$.

A p-re kapott egyenlőtlenséget kielégítő bármely valós szám esetén van olyan x szám, melyre igaz a paraméteres, x-ben másodfokú egyenlőtlenség. Egy ilyen x és p számpár viszont eleget tesz az eredeti egyenlőtlenségnek is. Tehát a feladat feltételeit kielégítő p számok és csak ezek az $1-\sqrt{5}\le p\le 1+\sqrt{5}$.

1480. (1)-nek két különböző gyöke van, ha diszkriminánsa pozitív, azaz ha $(t+1)^2>0$, másrészt a Viète-formulák alapján, lévén a gyökök szorzata 1, így a gyökök összegének pozitívnak kell lenniük, azaz $(t+1)<0$. A feltételekből kapjuk, hogy $t<-3$.
A (2) állításban szereplő egyenlőtlenséget írjuk más alakban:
$(2x-1)^2+(t+2)x\ge 0$. Ez teljesül, ha $t\ge -2$.

Összegezve:	$t<-3$	esetén (1) igaz, (2) hamis
	$-3\le t\le -2$	esetén (1) hamis, (2) hamis
	$t\ge -2$	esetén (1) hamis (2) igaz.

Így a keresett t értékek azok, amelyekre: $t<-3$ vagy $t\ge -2$.

1481. Egy rögzített p érték esetén *a)* vagy *b)* feltétel csak akkor teljesülhet minden x-re, ha K minden x-re értelmezhető, és értéke sehol sem nulla. Ez pedig akkor következik be, ha K-nak sem a számlálója, sem a nevezője nem nulla, vagyis a számláló és a nevező – és ezzel együtt K is – állandó előjelű. Ezért mindkét kifejezés diszkriminánsának negatívnak kell lennie. Tehát:

$D_{sz} = (p+6)^2(100-4p^2) < 0$;

$D_n = (p-6)^2(100-4p^2) < 0$.

A két feltételt összesítve: $|p| \neq 6$ és $|p| > 5$.

Ha tehát a p-re kapott feltételek teljesülnek, akkor és csak akkor, K értéke vagy pozitív minden x-re, vagy negatív. Azt, hogy a p-re kapott értékek közül melyekre lesz K értéke pozitív, illetve negatív, úgy állapíthatjuk meg, hogy megnézzük K előjelét egy tetszőleges x helyen. Legyen például $x = 0$, ekkor $K = \dfrac{(p+4)(p+6)}{(p-6)(p+3)}$. K előjelét összevetve p lehetséges értékeivel kapjuk, hogy

a) K pontosan akkor pozitív minden x-re, ha $|p| > 6$

b) K pontosan akkor negatív minden x-re, ha $5 < |p| < 6$.

1482. Az $f(x)$ függvény grafikonja egy lefelé nyitott parabola íve, a teljes parabola, zérushelyei: $x_1 = 0$, $x_2 = 2p$. Tengelypontja $T\left(p, \dfrac{p}{2}\right)$ pont. Az értelmezési tartományon a parabola egy ívét kapjuk, melynek végpontjai: $(0; 0)$, illetve a $\left(\dfrac{4}{p}; \dfrac{4p^2-8}{p^3}\right)$ pontok. Két esetet különböztetünk meg:

1. eset: ha a vizsgált ív tartalmazza a tengelypontot. Ekkor $f(x)$ legnagyobb értéke nyilván $\dfrac{p}{2}$. Ez akkor áll fenn, ha $0 < p \le 2$. Ebben az esetben $f(x)$ nem vehet fel 1-nél nagyobb értéket.

2. eset: ha $f(x)$ grafikonja a parabola tengelypontját nem tartalmazza, akkor az $f(x)$ függvény növekvő, ezért $x = \dfrac{4}{p}$-nél veszi fel a legnagyobb értékét, amely $\dfrac{4p^2-8}{p^3}$. Mindez $p > 2$ esetén következik be. Lehet-e ekkor $\dfrac{4p^2-8}{p^3} > 1$, azaz $p^3 - 4p^2 + 8 < 0$, vagyis $(p-2)(p^2-2p-4) < 0$. Az egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha $1-\sqrt{5} < p < 1+\sqrt{5}$. Összevetve a $p > 2$ feltétellel tehát $f(x)$ akkor és csak akkor vehet fel 1-nél nagyobb értéket, ha $2 < p < 1+\sqrt{5}$.

1483. Mivel x és y n-jegyű számok, ezért: $10^{n-1} \le x < 10^n$ és $10^{n-1} \le y < 10^n$. A másik feltételből: $\left(10^{n-1}\right)^3 \le y^3 = x^2 < \left(10^n\right)^2$, azaz $10^{3n-3} < 10^{2n}$, akkor és csak akkor, ha $n < 3$. Az $x = y = n = 1$ triviális megoldástól különbözőt kaphatunk, ha $n = 1$, vagy $n = 2$ és $x \ge 2$, $y \ge 2$.

A számelmélet alaptétele értelmében, ha $y \ge 2$ és y^3 négyzetszám, akkor y törzstényezős felbontásában minden törzstényező páros számszor fordul elő, tehát y négyzetszám. Ekkor: $x^2 = y^3 = v^6$, $v \in Z$, $v \ge 2$. Mivel $x = v^3 < 10^2 < 5^3$, így $2 \le v \le 4$.

Ha $v = 2$, akkor $x = 2^3$, $y = 2^2$.
Ha $v = 3$, akkor y csak egyjegyű, ez nem felel meg.
Ha $v = 4$, akkor $x = 4^3$, $y = 4^2$.
Tehát a triviális megoldással együtt összesen három megoldás van.

1484. Legyen a készített szendvicsek száma: sajtosból x db, szalámisból y db.
Készleteink miatt:

$$\begin{aligned} 5x + 5y &\le 200, \text{ (kenyér)},\\ x + \frac{5}{3}y &\le 50, \text{ (vaj)}\\ 2x &\le 60, \text{ (sajt)}\\ y &\le 20, \text{ (szalámi)} \end{aligned}$$

$$x,\ y \in \mathbf{Z};$$

$$x + y \le 40;$$

Rendezve az egyenlőtlenségeket: $3x + 5y \le 150$ egyenletrendszerhez jutunk.

$$0 \le x \le 30;$$

$$0 \le y \le 20.$$

A minden feltételt kielégítő *(x; y)* pontok a koordináta-rendszerben az alábbi egyenesekkel határolt területen lévő pontok:

$$y = 40 - x; \quad y = -\frac{3}{5}x + 30; \quad x = 0; \quad x = 30; \quad y = 0; \quad y = 20.$$

Mivel a maximális darabszám 40, keressük a egyenesek által meghatározott hatszög $y = 40 - x$ egyenesének közös rácspontjait. Ennek alapján 6 megoldást kapunk:

Sajtosból (x)	30 db	29 db	28 db	27 db	26 db	25 db
Szalámisból (y)	10 db	11 db	12 db	13 db	14 db	15 db.

Az elkészítés ideje: $T = x + y$ perc. A T értékeihez tartozó egyenesek párhuzamosak az $x + 2y = 30$ egyenessel. Ezért T minimuma ha $x = 30$ és $y = 10$, ekkor $T_{min} = 50$ perc.

1485. Az $x^2 + y^2 \ge 1$ egyenlőtlenséget a (0; 0) pont kivételével a sík minden egész koordinátájú pontja kielégíti. Az $x^2 + y^2 - 6x \le 0$ egyenlőtlenséget az $(x - 3)^2 + y^2 \le 9$ egyenletű kör belső, egész koordinátájú pontjai elégíti ki. Ez 29 db pont.
Mindkét egyenlőtlenséget 28 db pont koordinátái elégítik ki: (1; 0), (2; 0), (3; 0), (4; 0), (5; 0), (6; 0), (1; 1), (2; 1), (3; 1), (4; 1), (5; 1), (1; 2), (2; 2), (3; 2), (4; 2), (5; 2), (1; –1), (2; –1), (3; –1), (4; –1), (5; –1), (1; –1), (1; –2), (1; –3), (1; –4), (1; –5), (3; 3), (–3; –3).

1486. $x^2+y^2 \le 5x$, $(x-2{,}5)^2+y^2=2{,}5^2$ egyenlőtlenséget a $K(2{,}5;\ 0)$ középpontú $r=2{,}5$ egység sugarú körvonal és a kör belső pontjainak koordinátái elégítik ki.
Az $y \le x-2$ egyenlőtlenséget az $y=x-2$ egyenletű egyenes és az egyenes alatti pontok koordinátái elégítik ki.
A megoldást a két síkrész közös részében lévő pontok koordinátái és a határvonal pontjainak koordinátái adják. Ezek elégítik ki a két egyenlőtlenséget egyszerre.
1487. Egyenletünk $(2b-3c)x=c-b$ alakban írható. Az x csak akkor pozitív, ha $2b-3c$ és $c-b$ azonos előjelűek. Ez kétféleképpen lehetséges:
I. $c-b>0$ és $2b-3c>0$, vagy
II. $c-b<0$ és $2b-3c<0$.
Az első eset ellentmondásra vezet: $c>\frac{3}{2}c$, mivel c pozitív szám.
A második eset akkor és csak akkor teljesülhet, ha $c<b<\frac{3}{2}c$.
Ez csak három esetben fordulhat elő a megadott alaphalmazon:
$c=3;\ b=4;\ x=1$, vagy
$c=4;\ b=5;\ x=\frac{1}{2}$, vagy
$c=5;\ b=6;\ x=\frac{1}{3}$.
1488. Jelöljük az x_i-100 különbséget y_i-vel. $(1 \le i \le n+1)$
Az $y_1, \ldots y_{n+1}$ számokra: (1) $y_{n+1}=y_1$;
(2) $100y_i \ge 101y_{i+1}$;
(3) $y_1+y_2+\ldots+y_n \ge 0$ teljesül.
Ha az y_i-k között volna negatív, akkor az annál nagyobb indexűek (2) miatt mind negatívak volnának és (1) miatt y_1 is negatív volna. Ebből (2) miatt következne, hogy mind negatívak, ez viszont ellentmond (3)-nak. Tehát az y_i-k nem negatívak, így (2) miatt: $y_i \ge y_{i+1}$. $(i=1,2,\ldots,n)$.
Tehát az $(y_1-y_2)+(y_2-y_3)+\ldots+(y_n-y_{n+1})$ összegeknek minden tagja nem negatív. Azonban (1) miatt ez az összeg 0-val egyenlő, így minden tagja 0. Tehát az összes y_i 0-val, és az összes x_i 100-zal egyenlő.
1489. Tegyük fel, hogy az egyenlőtlenségeink igazak. Rendezve:
(1) $a<c+d-b$;
(2) $a(c+d-b)<cd-bc-bd$;
(3) $a(cd-bc-bd)<-bcd$.
A feltétel szerint minden szám pozitív, így (1) miatt $c+d-b>0$. Így (2) bal oldala pozitív, tehát $cd-bc-bd>0$. Tehát (3) bal oldala pozitív, vagyis $-bcd>0$ következne. Ez ellentmond a kezdeti feltételünknek, tehát nem lehet minden egyenlőtlenség egyidejűleg igaz.